Colle du 28 novembre: Fonctions réglées

10.1 Première série

Exercice 1: Soient $a > 1$ et $b > 1$. Calculer $\int_0^\pi \ln\left(\frac{b-\cos x}{a-\cos x}\right) dx$.

Exercice 2: Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^3$ telle que $f(-1) = f(0) = f(1) = 0$. Trouver la meilleure constante $C > 0$ telle que nécessairement $\int_{-1}^1 |f(t)|dt \le C\|f^{(3)}\|_\infty$.

Exercice 3: Soit $f \in C([0,1], \mathbb{R}^+)$ telle que $\int_0^1 f = 1$. Pour $\psi \in C([0,1], \mathbb{R})$, on pose $\Lambda_n(\psi) = \int_0^1 ... \int_0^1 \psi\left(\frac{x_1+...+x_n}{n}\right) f(x_1)...f(x_n)dx_1...dx_n$. Donner la limite de $\Lambda_n(\psi)$ quand $n \to \infty$.

Exercice 4: On se place dans le plan $\mathbb{R}^2$, d'origine O. On se donne n points $Q_1, ..., Q_n$. Montrer qu'il existe un point P sur le cercle de centre O et de rayon 1 tel que $\prod_i PQ_i \ge 1$. Peut-on préciser le résultat lorsque $Q_1, ..., Q_n$ sont dans le disque de centre O et de rayon 1?

10.2 Deuxième série

Exercice 1: Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(0) \ne 0$.
1. Donner un équivalent en $+\infty$ de $g(t) = \int_0^1 \frac{f(x)}{1+tx}dx$.
2. Majorer la différence entre g et cet équivalent lorsque f est $\mathcal{C}^1$.

Exercice 2: *Théorème de d'Alembert*
1. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ fonction 2π-périodique ne s'annulant pas. Montrer que $\frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f'(t)}{f(t)}dt$ est un entier.
2. En déduire une preuve du théorème de d'Alembert.

Exercice 3: Soient $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ positive continue, et a et b dans $\mathbb{R}^+$. On suppose que pour $x \ge 1$, $f(x) \le a\int_1^x \frac{f(t)}{t^2}dt + b$. Trouver une fonction g optimale telle que $f \le g$.

10.3 Troisième série

Exercice 1: Soient $0 < a < b$. Calculer la limite de $\int_{ax}^{bx} \frac{u-\sin u}{u^4}$ quand $x \to 0^+$.

Exercice 2: *Critère d'équirépartition de Weyl*
Soit $(u_n)_{n\ge1}$ une suite de $[0,1]$. Pour $0 \le a \le b \le 1$, on note $N_n(a,b) = Card\{k \in [1,n], u_k \in [a,b]\}$.
Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes:

(i) $\frac{N_n(a,b)}{n}$ tend vers $b-a$ pour tout couple (a,b).

(ii) pour toute fonction continue $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, on a $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(u_k) \to \int_0^1 f(t)dt$.

(iii) pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n e^{2i\pi p u_k} \to 0$.

Exercice 3: Soit $a \in \mathbb{R}$. Trouver le minimum de $\int_0^1 (f''(t))^2 dt$ pour f de classe $\mathcal{C}^2$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = f(1) = 0$ et $f'(0) = a$.